**Lernschritte beim Umgang mit Funktionen**

Hofmann & Roth, 2021

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Lernschritte bei der Entwicklung funktionalen Denkens** | Erklärung: Was müssen SuS können / verstanden haben? | Typische Fehler in diesen Schritten | Wie arbeite ich weiter, nachdem ich den Fehler identifiziert hat? |
| **Eindeutige Zuordnung erfassen** | Graph als funktionaler Zusammenhang, bei dem jedem Wert der ersten Größe auf der x-Achse (unabhängige Variable) ein Wert der zweiten Größe auf der y-Achse (abhängige Variable) zugeordnet wird. | Missachtung der Eindeutigkeit:   1. **Graph-als-Bild-Fehler** (nach Vogel, 2006):Oberflächenmerkmale eines Funktionsgraphen und einer Situation werden fälschlicherweise aufeinander übertragen.   Der Funktionsgraph wird als das fotographische Abbild von Realsituationen verstanden, nicht als die Darstellung eines funktionalen Zusammenhangs / bestehender Abhängigkeiten (Ostermann et al., 2015), bei dem einer Größe (auf der x-Achse 🡪 unabhängige Größe) eine andere Größe (auf der y-Achse 🡪 abhängige Größe) zugeordnet wird.  Aufgabenbeispiel „Der König des Schreckens“: Looping bei der Achterbahnfahrt  *Wagen kann sich nach einer bestimmten gefahrenen Strecke nicht gleichzeitig auf verschiedenen Höhen befinden.*  Schülerbearbeitung:     * SuS können nicht hinreichend zwischen Situation und graphischer Darstellung differenzieren * Situation-zu-Bild-Übersetzung gelingt nicht (Hußmann & Laakmann, 2011, S. 5). * Einer der verbreitetsten Fehler im Bereich der graphischen Interpretation (Nitsch, 2015, S. 143). * Zeigt auf, dass die Grundvorstellungen nach Vollrath (Eindeutigkeit einer Zuordnung, Kovariation (Änderungsverhalten / Abhängigkeit von Größen), Funktion als Ganzes (Objektaspekt / Erfassen der Gesamtsituation) nicht abgerufen werden können.  1. Einem x-Wert werden mehrere y-Werte zugeordnet  * Siehe Looping * Zeigt auf, dass die Grundvorstellung Eindeutigkeit einer Zuordnung nach Vollrath (1989) nicht abgerufen werden kann.  1. Übergeneralisierung der Eindeutigkeit / von eindeutiger Zuordnung auf die Injektivität schließen   „Jedem x wird genau ein y zugeordnet“ wird fälschlich interpretiert als „dann darf auch jedes y nur einmal vorkommen.“ | Diese zentrale Eigenschaft von Funktionen (Eindeutigkeit der Zuordnung) regelmäßig im Unterricht thematisieren und in konkreten Situationen verdeutlichen (z. B. Beispiel Looping) 🡪 Rückbezug auf zugrunde liegende Situation unterstützt die Ausbildung geeigneter Vorstellungen  Experimente entschleunigen SuS gehen in die Zuordnungsrolle ein: Daten sammeln. z. B. ein Zeitpunkt, eine Temperatur, ein Streckenpunkt, eine Höhe … |
| **Verstehen der funktionalen Abhängigkeit / Abhängige und unabhängige Größe erfassen** | Bei Funktionen geht es um gerichtete Zusammenhänge. Ein zentraler Lernschritt ist die Unterscheidung der unabhängigen und abhängigen Größe. Welche Größe variiert und welche Größe ergibt sich aus dem funktionalen Zusammenhang? | 1. Die abhängige und unabhängige Größe werden vertauscht.      1. X- und y- Koordinate werden beim Eintragen von Zahlenpaaren in ein Koordinatensystem vertauscht.   Z. B.: Erstelle zur Tabelle einen Funktionsgraphen. | * Genaues Lesen der Aufgabenstellung einfordern und einüben. * Schlüsselwörter markieren. * Situationen thematisieren, die sich nicht umkehren lassen bzw. deren Umkehrung keine Funktion ergibt (etwa durch den Verlust der Eindeutigkeit). |
| **Koordinatensystem erstellen** | Die Fähigkeit zum Darstellungswechsel zwischen der Situation und der mathematischen Darstellung (z. B. Funktionsgraph) entwickeln.  Achsen müssen nicht identisch skaliert sein. | 1. Achsen skalieren (SuS nehmen an, dass die Achsen identisch sein müssen). |  |
| **Bezug zur Situation herstellen** | Darstellungswechsel zwischen Situation und einer mathematischen Darstellung (z. B. Funktionsgraphen) wechseln.  Situation muss erst erfasst und anschließend (graphisch) modelliert werden 🡪 fehleranfällig.  Dürfen die eingezeichneten Punkte miteinander verbunden werden?  Graphen sind unendliche Punktmengen. | 1. Übergeneralisierung / Illusion der Linearität (De Bock et al., 2007) / Proportionalität: alle Zusammenhänge sind linear oder proportional      1. Punkte verbinden?   In einem Park werden Fahrräder vermietet. Die erste Stunde kostet 5 Euro und jede weitere angefangene Stunde kostet zusätzlich 2 Euro. Zeichne einen Graphen zu der gegebenen Situation! (Durchgezogene Linie würde einen kontinuierlichen Preisanstieg bedeuten und keine stundenweise Berechnung)  Wie viel müsste man denn zwischen den ganzen Stunden bezahlen (Preisgleichheit)? Es braucht einen Treppengraphen.   1. Keine Änderung entspricht dem Funktionswert 0 / Konstante Graphenabschnitte (parallel zur x-Achse) werden falsch interpretiert?   Aufgabenbeispiel: Ein Radfahrer fährt nach dem Start einen Berg hinauf. Oben angekommen fährt er eine Zeit lang mit konstanter Geschwindigkeit, bevor er wieder den Berg hinuntergeht. Zeichne einen Graphen, welcher die Geschwindigkeit des Radfahrers über die gefahrene Strecke darstellt. | Zu intensive einseitige Auseinandersetzung mit linearen und proportionalen Zusammenhängen zu Beginn der Einheit kann zur Illusion der Linearität führen.  Im Unterricht auch untypische funktionale Zusammenhänge sowie deren Funktionsgraphen behandeln und die Vereinbarkeit der verinnerlichten Definition mit dem neuen Graphentyp erfahrbar machen. |
| **Bestand und Änderung unterscheiden** | Lernen, den Bestand (y-Werte im Bereich) von der Änderung zu unterscheiden. | Slope / height confusion (McDermott et al., 1987, S. 504): SuS vermischen die Steigung eines Graphen an einer Stelle mit dem Funktionswert an dieser Stelle. Es gelingt ihnen nicht, die Änderungsrate vom aktuellen Bestand einer Größe zu unterscheiden.  Aufgabenbeispiel: Welche der beiden Wanderer ist in der letzten halben Stunde schneller gelaufen?  „Peter, denn seine Linie ist höher.“  „Peter war schneller, weil er sein Tempo gehalten hat“. |  |



**Literatur**

De Bock, D., van Dooren, W., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2007). *The Illusion of Linearity. From Analysis to Improvement*. Springer.

Hofmann, R. & Roth, J. (2021). Lernfortschritte identifizieren. Typische Fehler im Umgang mit Funktionen. *Mathematik lehren, 226,* 15–19.

Hußmann, S., & Laakmann, H. (2011). Eine Funktion – viele Gesichter: Darstellen und Darstellungen wechseln. *PM: Praxis der Mathematik in der Schule, 53*(38), 2–13.

McDermott, L. C., Rosenquist, M. L., & van Zee, E. H. (1987). Student difficulties in connecting graphs and physics: Example from kinematics. *American Journal of Physics, 55*(6), 503–513.

Nitsch, R. (2015). *Diagnose von Lernschwierigkeiten im Bereich funktionaler Zusammenhänge. Eine Studie zu typischen Fehlermustern bei Darstellungswechseln*. Springer Spektrum.

Ostermann, A., Leuders, T., & Nückles, M. (2015). Wissen, was Schülerinnen und Schülern schwer fällt. Welche Faktoren beeinflussen die Schwierigkeitseinschätzung von Mathematikaufgaben? *Journal für Mathematik-Didaktik, 36*(1), 45–76.

Vogel, M. (2006). *Mathematisieren funktionaler Zusammenhänge mit multimediabasierter Supplantation*. Franzbecker.

Vollrath, H.-J. (1989). Funktionales Denken. *Journal für Mathematik-Didaktik, 10*(1), 3–37.